RAZREDNI ODJEL	**4. (a)**
NASTAVNA CJELINA/TEMA	**PAD I RAST FUNKCIJE. EKSTREMI**
NASTAVNA JEDINICA	**Ekstremi funkcije**
IME I PREZIME	**Daniela Marčetić** **danielamarcet@gmail.com** **daniela.marcetic@skole.hr**
OŠ Grabrik, Karlovac	

1. GLAVNI CILJ NASTAVNOG SATA

Učenici će usvojiti pojmove ekstrem, lokalni minimum i lokalni maksimum, te usvojiti postupak nalaženja ekstrema funkcije i određivanje karaktera ekstrema uz pomoć prve derivacije funkcije.

2. OČEKIVANA UČENIČKA POSTIGNUĆA

Učenici će:

- povezati određivanje stacionarnih točaka i monotonosti funkcije s određivanjem ekstrema funkcije,
- razlikovati karakter ekstrema (minimum, maksimum)
- usvojiti postupak nalaženja lokalnih ekstrema
- razvijati vještinu komunikacije u skupini

3. KORELACIJE UNUTAR MATEMATIKE I S DRUGIM NASTAVNIM PREDMETIMA

Fizika –povezivaje s određivanjem najveće/najmanje udaljenosti čestice od ishodišta u nekom vremenskom intervalu $\langle 0,t \rangle$ pri čemu je položaj čestice u odnosu na ishodište opisan funkcijom; određivanjem maksimalne visine na koju je hitac (kamen) stigao kod vertikalnog hitca (bacanja kamena vertikalno uvis),

Informatika / Novinarska grupa – povezivanje s određivanjem dimenzija postera zadane površine uz standardne uvjete na margine kako bi površina sa slikom bila maksimalna,

Matematika – geometrija – povezivanje s određivanjem najmanjeg/najvećeg mogućeg opsega geometrijskog lika zadane površine; određivanjem najmanjeg/najvećeg mogućeg oplošja geometrijskog tijela zadanog volumena (problem optimizacije)

4. TIP NASTAVNOG SATA

Sat obrade.

5. NASTAVNI OBLICI

Diferencirana nastava u obliku individualnog rada, diferencirana nastava u obliku rada u skupini.

6. NASTAVNE METODE

- prema izvorima znanja: metoda dijaloga, metoda demonstracije, metoda crtanja
- prema oblicima zaključivanja: metoda analize i sinteze, metoda analogije, heuristička metoda

7. NASTAVNA SREDSTVA

- udžbenik
- GeoGebra prezentacija (Prilog 1, Prilog 2, Prilog 3)
- nastavni listić (Prilog 4)

8. NASTAVNA POMAGALA

Ploča, kreda, kreda u boji, PC računalo, LCD projektor.

9. LITERATURA

- Dakić, B., Elezović, N.: „Matematika 4: udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred tehničkih škola “, Element, Zagreb, 2001.
- Kurepa, S., Kurepa, A., Hrnčević, J., Sarapa, N.: „Matematika 4: udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije “, Školska knjiga, Zagreb, 2001.
- Antoliš, S., Copić, A., Antončić, N. : „Matematika 4: udžbenika sa zbirkom zadataka za 4. razred opće, jezične i klasične gimnazije, 2. dio“, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

MAKROPLAN

Motivacijski primjer: lokalni minimum i lokalni maksimum

↓

Nuždan uvjet za lokalni ekstrem

↓

Aktivnost: Otkrivanje dovoljnih uvjeta za postojanje ekstrema i postupka za određivanje lokalnih ekstrema

↓

Primjena postupka za određivanje ekstrema

↓

Domaća zadaća

MIKROPLAN

UVODNI DIO SATA (10 min)

- upisivanje nastavne jedinice i odsutnih učenika u dnevnik rada
- metodom dijaloga ponoviti s učenicima pojmove vezane za monotonost funkcije (kad funkcija raste na intervalu $\langle a, b\rangle$, kad funkcija pada na intervalu $\langle a, b\rangle$), ponoviti koje točke nazivamo stacionarnim točkama, ponoviti geometrijsko značenje derivacije funkcije u točki (što kada je vrijednost derivacije jednaka 0), te postupak određivanja intervala monotonosti

GLAVNI DIO SATA (30 min)

- započeti s motivacijskim primjerom – učenici određuju stacionarne točke i intervale monotonosti za funkciju $f(x)=x^3-3x+3$ nakon čega učenicima uz pomoć projektora prikazujem ggb prezentaciju na kojoj je prikazan graf funkcije $f(x)=x^3-3x+3$. (Prilog 1)
- učenicima pokazujem tablicu vrijednosti funkcije za određene vrijednosti varijable x na intervalu $\langle -2.5, 2.5\rangle$, te tablicu tijeka funkcije i metodom dijaloga uspoređujemo dobivena rješenja mijenjajući vrijednosti varijable x (lijevo i desno od dobivenih stacionarnih točaka)
- od učenika tražim da mi opišu ponašanje funkcije f u okolini točaka $x_1=-1$ i $x_2=1$ (dobivenih stacionarnih točaka), promatramo interval oko točke $x_1=-1$, odnosno $x_2=1$ i pitam ih što mi mogu reći o vrijednosti funkcije na tom intervalu
- učenici zaključuju da u intervalu oko x_1 funkcija poprima najveću vrijednost baš u točki x_1, odnosno u intervalu oko x_2 funkcija poprima najmanju vrijednost baš u točki x_2
- uvodim pojam lokalni minimum/maksimum za proizvoljnu funkciju f, te pojam ekstrem funkcije
- ispisujem naslov
- učenicima napominjem da je x_0 točka u kojoj funkcija f postiže lokalni minimum/maksimum, a da je $f(x_0)$ lokalni minimum/maksimum funkcije (Prilog 2)
- ponovno se vraćamo na početni primjer (ggb prezentaciju) i napominjem učenicima da riječ „lokalni“ označava da je vrijednost funkcije u toj točki veća (ili manja) od vrijednosti u svim susjednim točkama, ali to ne mora biti najveća (najmanja) vrijednost funkcije na čitavom području definicije (Prilog 1, Prilog 2)
- nadalje, učenike pitam što mi mogu reći o monotonosti funkcije f lijevo/desno od točke $x_1=-1$, odnosno točke $x_2=1$, te im pokazujem položaj tangente u točkama na

intervalu $\langle -2.5, 2.5 \rangle$ zadržavajući se malo duže u točkama koje smo dobili kao vrijednosti stacionarnih točaka (učenici uočavaju da je tangenta paralelna s x-osi), pitam ih što znaju o vrijednosti prve derivacije u točki u kojoj je tangenta paralelna s x-osi , dolazimo do zaključka da ako funkcija f poprima u x_0 lokalni ekstrem i ako f ima derivaciju u toj točki, tada vrijedi da je $f'(x_0) = 0$.

- ispisujem nužan uvjet za lokalni ekstrem na ploču (naglašavam da tvrdnja ne vrijedi u oba smjera, odnosno da su za derivabilne funkcije točke ekstrema nužno i stacionarne točke, no da stacionarna točka ne mora biti točka ekstrema funkcije; kako bi učenici samostalno zaključili kada će stacionarna točka x_0 biti točka lokalnog ekstrema prelazimo na sljedeću aktivnost

Aktivnost: Otkrivanje dovoljnog uvjeta za postojanje ekstrema i postupka za određivanje lokalnih ekstrema

Cilj aktivnosti:

Učenici će „otkriti“ kako odrediti karakter stacionarne točke uz pomoć prve derivacije (dovoljan uvjet za postojanje ekstrema) te postupak određivanja lokalnih ekstrema.

Nastavni oblik:

Diferencirana nastava u obliku individualnog rada i rada u skupini.

Nastavna metoda:

- prema izvorima znanja: metoda crtanja, metoda rada na zadacima
- prema oblicima zaključivanja: metoda analize i sinteze

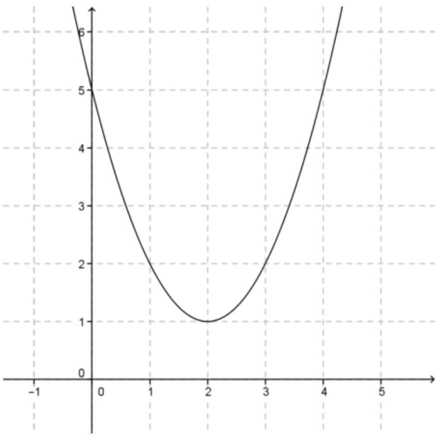
Potreban materijal:

- nastavni listić

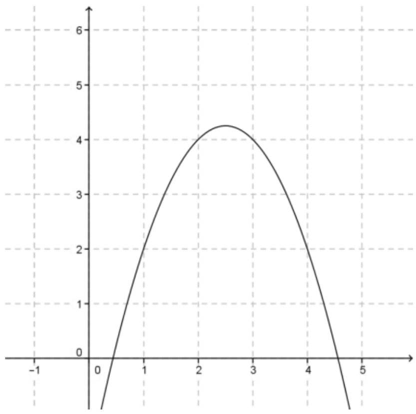
Tijek aktivnosti:

Učenici će dobiti nastavne listiće na kojima su ispisane četiri funkcije (za svaku grupu jedna funkcija) Zadatak učenika je nacrtati graf jedne od tih funkcija (one funkcije koja mu je zaokružena) te odrediti stacionarne točke funkcije, intervale monotonosti i karakter stacionarne točke. Dobivene rezultate upisuje u tablicu koja se nalazi na nastavnom listiću u redak u kojem se nalazi „njegova“ funkcija, a ostatak tablice popunjava nakon izlaganja dobivenih podataka drugih grupa. Po završetku i komentiranju dobivenih rezultata učenicima pokazujem rezultate na ploči za projiciranje (Prilog 3) Nastavni listić nalazi se u prilogu ove pripreme. (Prilog 4).

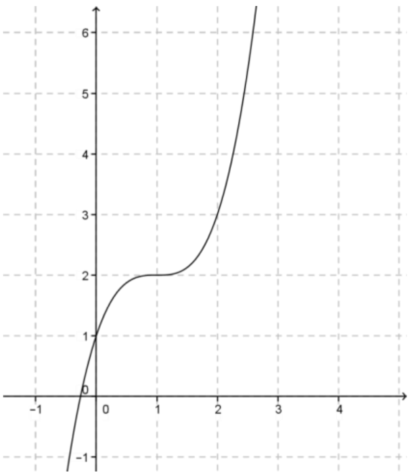
Rješenje nastavnog listića



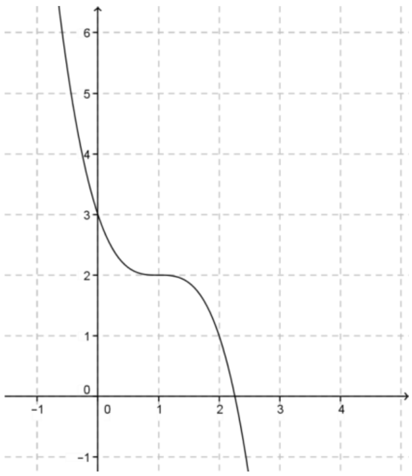
A) $f(x)=x^2-4x+5$



B) $f(x)=-x^2+5x-2$



C) $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$



D) $f(x)=-x^3+3x^2-3x+3$

1. Stacionarne točke:

   A) $x=2$

   B) $x=\dfrac{5}{2}$

   C) $x=1$

   D) $x=1$

2. Intervali monotonosti:

   A) interval pada : $\left\langle -\infty, 2\right\rangle$, interval rasta $\left\langle 2,\infty\right\rangle$

   B) interval pada : $\left\langle \dfrac{5}{2},\infty\right\rangle$, interval rasta $\left\langle -\infty,\dfrac{5}{2}\right\rangle$

   C) interval rasta $\left\langle -\infty,\infty\right\rangle$

   D) interval pada $\left\langle -\infty,\infty\right\rangle$

		lijevo od x_0	desno od x_0	karakter točke
A	derivacija	$f'(x)<0$	$f'(x)>0$	minimum
B	derivacija	$f'(x)>0$	$f'(x)<0$	maksimum
C	derivacija	$f'(x)>0$	$f'(x)>0$	nije ekstrem
D	derivacija	$f'(x)<0$	$f'(x)<0$	nije ekstrem

Nakon što učenicima prikažem rezultate svih grupa na ploču za projiciranje učenici moraju zaključiti što je dovoljan uvjet za postojanje ekstrema. Nakon iskaza o nužnim i dovoljnim uvjetima za postojanje ekstrema učenici bi trebali samostalno zaključiti kako će odrediti lokalne ekstreme (uočiti korake za postupak određivanje lokalnih ekstrema).

Kroz zadatke učenici usvajaju i uvježbavaju postupak određivanja ekstrema:

ZADATAK 1. Odredite intervale monotonosti, točke ekstrema i ekstremne vrijednosti funkcije $f(x)=x^4-2x^2$.

Rješenje:

Derivacija funkcije je $f'(x)=4x^3-4x=4x(x^2-1)=4x(x-1)(x+1)$.
Stacinarne točke su : $x_1=0, x_2=1, x_3=-1$.
Na intervalu $\langle -\infty,-1\rangle$ derivacija je negativna, znači to je interval pada. Na intervalu $\langle -1,0\rangle$ derivacija je pozitivna, dakle to je interval rasta. Na intervalu $\langle 0,1\rangle$ derivacija je negativna, dakle to je interval pada i na intervalu $\langle 1,\infty\rangle$ derivacija je pozitivna, dakle to je interval rasta.

Lijevo od točke $x_3=-1$ funkcija pada, a desno od $x_3=-1$ funkcija raste, pa je u točki $x_3=-1$ lokalni minimum, a lokalni minimum je $f(-1)=-1$.

Lijevo od točke $x_1=0$ funkcija raste, a desno od $x_1=0$ funkcija pada, pa je u točki $x_1=0$ lokalni maksimum, a lokalni maksimum je $f(0)=0$.

Lijevo od točke $x_2=1$ funkcija pada, a desno od $x_2=1$ funkcija raste, pa je u točki $x_2=1$ lokalni minimum, a lokalni minimum je $f(1)=-1$.

<u>**Napomena:**</u> Na kraju ovoga zadatka komentiram s učenicima da su točke $x_2=1$ i $x_3=-1$ obje točke u kojima se postiže lokalni minimum. Funkcija može imati više lokalnih minimuma i maksimuma.

ZADATAK 2. Odredite intervale monotonosti, točke ekstrema i ekstremne vrijednosti funkcije $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$.

Rješenje:

Derivacija funkcije je $f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2}$.

Stacinarne točke su : $x_1=-1, x_2=1$

Funkcija raste na intervalima $\langle -\infty,-1\rangle$ i $\langle 1,\infty\rangle$, a pada na intervalu $\langle -1,0\rangle$ i $\langle 0,1\rangle$. Točka lokalnog maksimuma je -1, a lokalni maksimum je $f(-1)=-2$. Točka lokalnog minimuma je 1, a lokalni minimum je $f(1)=2$.

Napomena: Učenicima postavljam pitanje što mi mogu reći o vrijednosti funkcije u lokalnom maksimumu i lokalnom minimumu kako bi uočili da je minimum veći od maksimuma. Naglašavam im da je ovaj slučaj moguć jer je riječ o lokalnim ekstremima.

ZADATAK 3. Odredite intervale monotonosti, točke ekstrema i ekstremne vrijednosti funkcije $f(x)=x^3-3x^2-24x+5$.

Rješenje:

Derivacija funkcije je $f'(x)=3x^2-6x-24=3(x-4)(x+2)$

Stacionarne točke su : $x_1=4, x_2=-2$

Funkcija raste na intervalima $\langle -\infty,-2\rangle$ i $\langle 4,\infty\rangle$, a pada na intervalu $\langle -2,4\rangle$. Točka lokalnog maksimuma je -2, a lokalni maksimum je $f(-2)=33$. Točka lokalnog minimuma je 4, a lokalni minimum je $f(4)=-75$.

ZAVRŠNI DIO SATA (5min)

- zadajem učenicima domaću zadaću,

Domaća zadaća:

- zadatak 13. - 1.), 2.), 3.) i 4.) te zadatak 15. s 55. stranice udžbenika

- metodom dijaloga ponoviti gradivo rađeno na ovom satu

Ukoliko ostane još vremena učenici rješavaju zadatak :

ZADATAK 4. Odredite intervale monotonosti, točke ekstrema i ekstremne vrijednosti funkcije $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

Rješenje:

Derivacija funkcije je $f'(x)=\frac{-x^2+1}{x^4+2x^2+1}$.

Stacinarne točke su : $x_1 = -1, x_2 = 1$

Funkcija pada na intervalima $\langle -\infty, -1\rangle$ i $\langle 1, \infty\rangle$, a raste na intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Točka lokalnog minimuma je -1, a lokalni maksimum je $f(-1) = -\frac{1}{2}$. Točka lokalnog maksimuma je 1, a lokalni maksimum je $f(1) = \frac{1}{2}$.

<u>Rješenja zadataka za domaću zadaću:</u>

Zadatak 13. Odredi ekstreme sljedećih funkcija:

1. $f(x) = 12x - (3x-1)^2$;
2. $f(x) = -x^2 + 2x + 3$;
3. $f(x) = x^3 - 3x$;
4. $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$

Rješenja:

1. Točka lokalnog maksimuma je 1, a lokalni maksimum je $f(1) = 8$.
2. Točka lokalnog maksimuma je 1, a lokalni maksimum je $f(1) = 4$.
3. Točka lokalnog maksimuma je -1, a lokalni maksimum je $f(-1) = 2$ točka lokalnog minimuma je 1, a lokalni minimum je $f(1) = -2$.
4. Točka lokalnog maksimuma je -1, a lokalni maksimum je $f(-1) = -17$, točka lokalnog minimuma je 3, a lokalni minimum $f(3) = -4$.

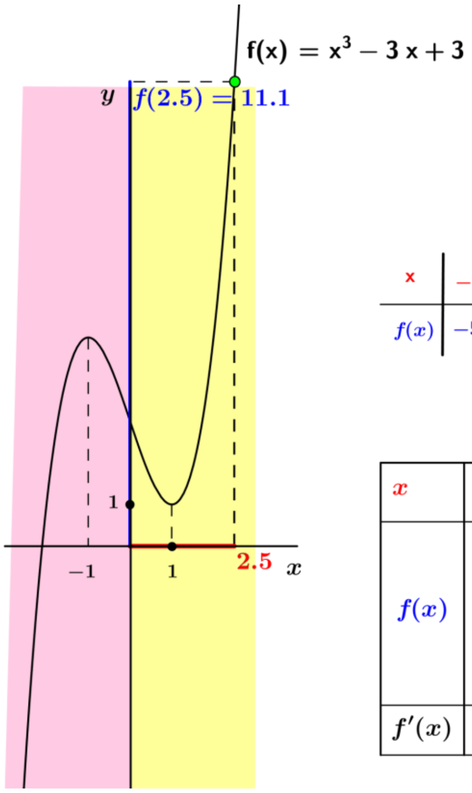
Zadatak 15. Odredi intervale monotonosti i ekstremne vrijednosti funkcija:

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x+1}$;
2. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 12}{x-1}$

Rješenja:

1. Točka lokalnog maksimuma je -4, a lokalni maksimum je $f(-4) = -12$ točka lokalnog minimuma je 2, a lokalni minimum je $f(2) = 0$.
2. Točka lokalnog maksimuma je -3, a lokalni maksimum je $f(-3) = -3$ točka lokalnog minimuma je 5, a lokalni minimum je $f(5) = 13$.

Prilog 1 GeoGebra (grafički prikaz)



Vrijednost varijable x

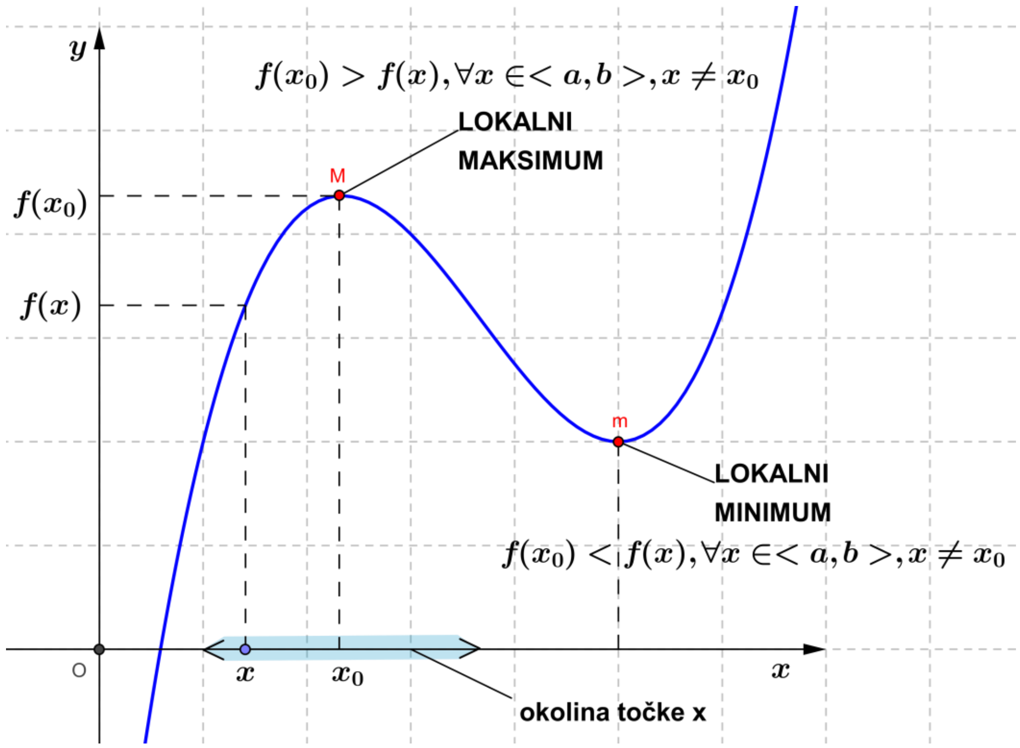
Tablica vrijednosti funkcije

x	−2.5	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
$f(x)$	−5.1	1	4.1	5	4.4	3	1.6	1	1.9	5	11.1

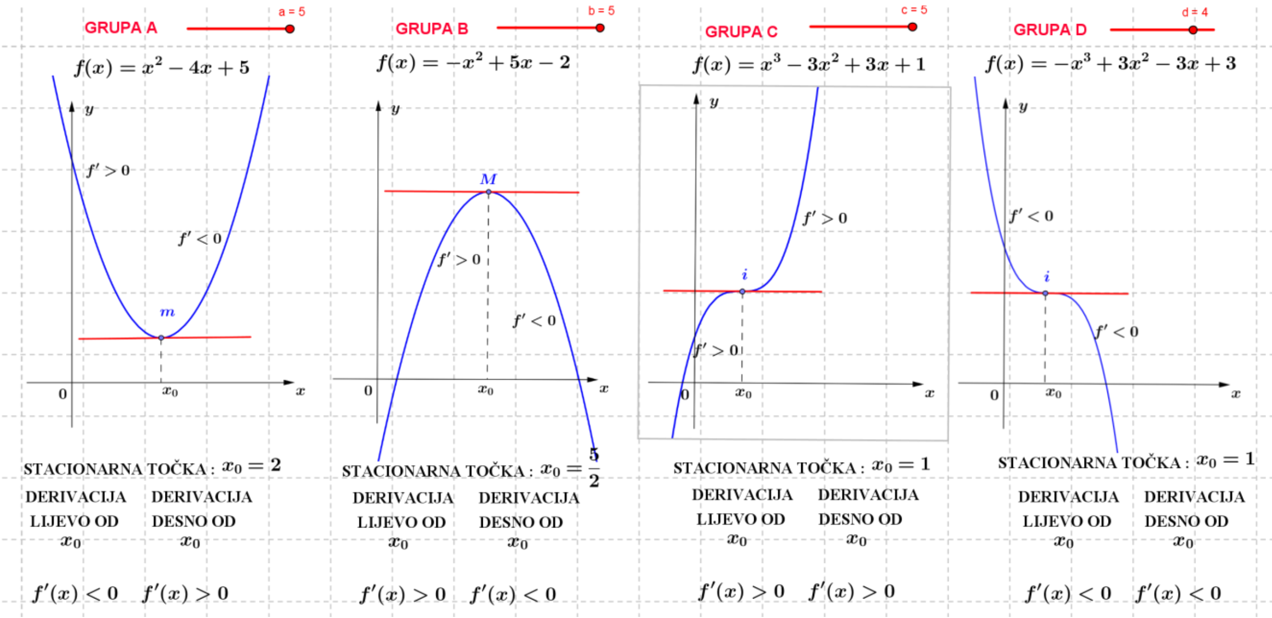
Tablica tijeka funkcije

x	-2.5		-1		1		2.5
$f(x)$	-5.1	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	11.1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Prilog 2 GeoGebra (grafički prikaz)

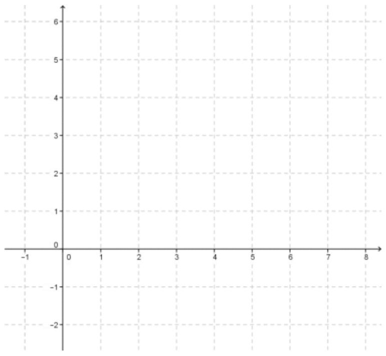


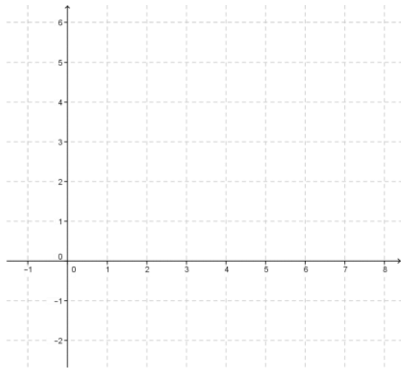
Prilog 3 GeoGebra (grafički prikaz)



Prilog 4 Nastavni listić

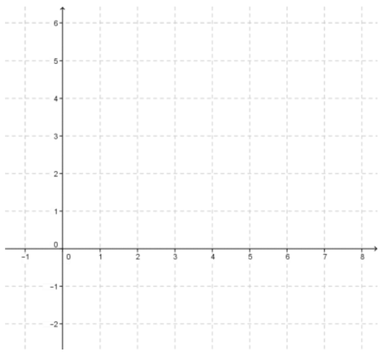
1. Nacrtajte graf zadane funkcije

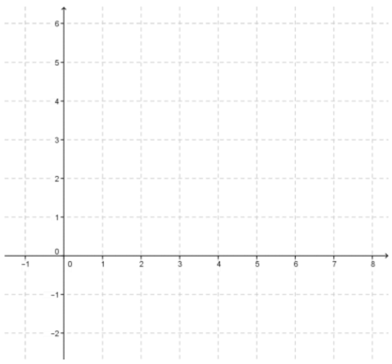




A) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

B) $f(x) = -x^2 + 5x - 2$





C) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

D) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 3$

2. Odredite stacionarne točke funkcije f.
3. Odredite intervale monotonosti.
4. Popuni tablicu za zadanu funkciju (u prvi i drugi stupac upiši vrijednost prve derivacije funkcije u odnosu na nulu, a u treći stupac o kojem ekstremu je riječ ukoliko ekstrem postoji):

		lijevo od x_0	desno od x_0	karakter točke
A	derivacija			
B	derivacija			
C	derivacija			
D	derivacija			