

dr. sc. Željka Dijanić

Srednja škola Čazma

## **Računalno vođeno učenje otkrivanjem uporabom GeoGebre**

### **Sažetak:**

*U ovome se radu opisuje model računalno vođenoga učenja otkrivanjem u nastavi matematike uz uporabu digitalnog alata GeoGebre. Model se temelji na konstruktivističkoj teoriji učenja i Pólyinoj heurističkoj strategiji rješavanja matematičkih problema, a sastoji se od tri elementa: objekata učenja, planiranih aktivnosti za učenike i željenih ishoda učenja. Nastao je po uzoru na konceptualni model e-učenja u prirodoslovlju uz primjenu digitalnih simulacija u obliku interaktivnih apleta izrađenih u GeoGebri.*

*Za implementaciju predloženoga modela učenja u nastavnu praksu i kreiranje odgovarajućih digitalnih obrazovnih sadržaja koristi se servis GeoGebraTube koji omogućuje relativno jednostavnu izradu digitalnog udžbenika sastavljenog od interaktivnih apleta i raznovrsnih multimedijalnih sadržaja dostupnih na online servisima poput Youtube-a i sl.*

*Nastavnici koji su koristili predloženi model učenja u nastavi matematike uočili su velik potencijal računala i GeoGebre kao scaffolding podrške ovakvom načinu učenja. Računalno vođeno učenje otkrivanjem utječe na bolje konceptualno razumijevanje matematičkih pojmova i ideja kao i na bolje proceduralno znanje. Kod većine učenika se uočava povećanje interesa za učenje matematike. Međutim, pojedini učenici koji se teže navikavaju na inovativne pristupe u nastavi ističu i neke nedostatke ovoga modela učenja.*

### **Ključne riječi:**

*digitalni udžbenik, GeoGebra, interaktivni aplet, model učenja uporabom IKT-a, scaffolding, vođeno učenje otkrivanjem*

## **1. Uvod i teorijski okvir**

Neke od tema i podtema ovogodišnjeg CUC-a osobito su zanimljive nastavnicima matematike koji već dulje vrijeme uvode ili tek žele uvesti inovativne pristupe u nastavi matematike uporabom informacijsko-komunikacijske tehnologije. Među njima bih osobito istaknula sljedeće: učenje usmjereno na učenika, konstruktivistički pristup učenju, učenje kroz argumentaciju, pokusi i greške u službi učenja (istraživačko učenje), igra u službi učenja, udaljeni i virtualni laboratoriji i sl. Na koji način ovdje navedeno implementirati u nastavu, koje oblike i metode rada s učenicima koristiti, koje digitalne alate primjerene nastavi matematike odabrati?

Model računalno vođenoga učenja otkrivanjem uporabom programa dinamične geometrije *GeoGebra* jedna je od mogućnosti inovativnog pristupa u nastavi matematike

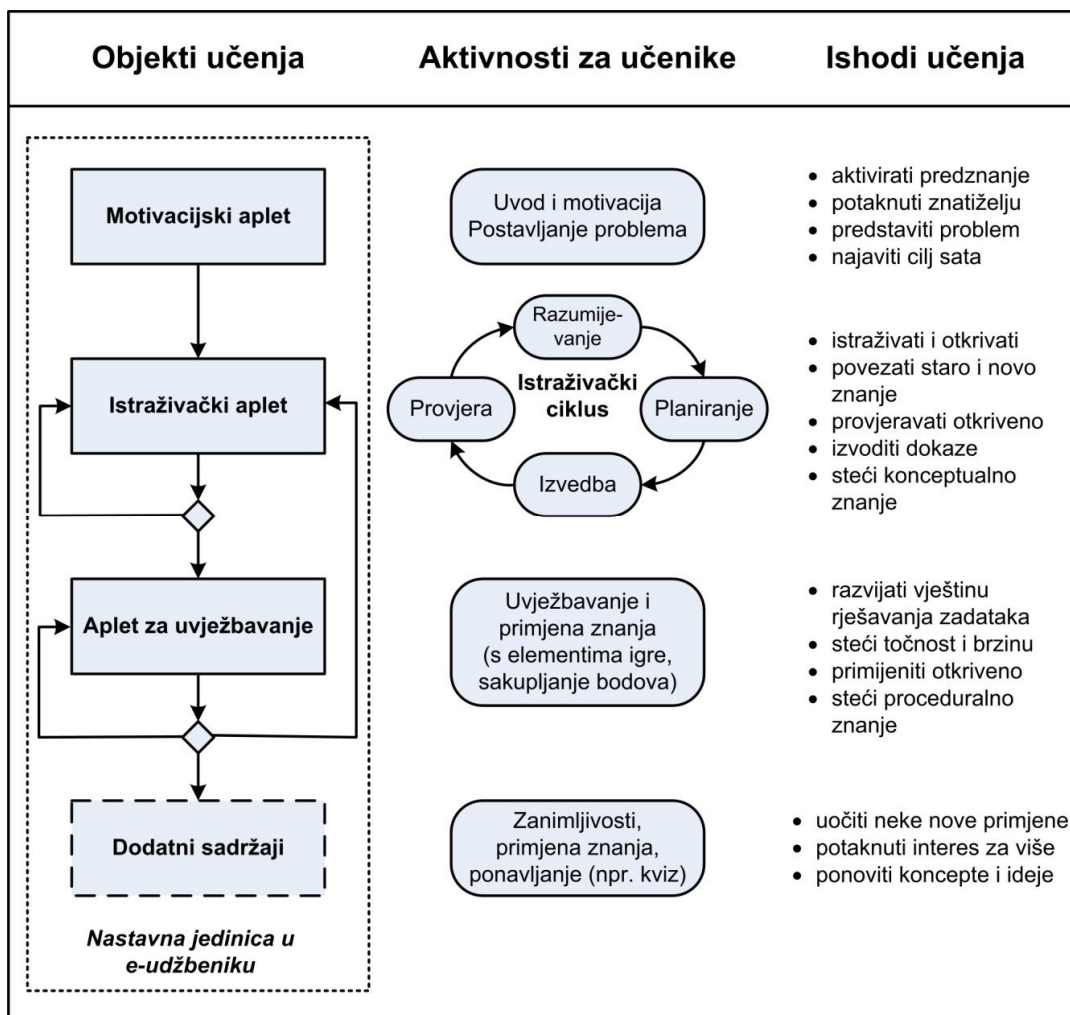
uporabom IKT-a, a nastao je po uzoru na sličan konceptualni model e-učenja u prirodoslovlju [1]. Osnovna ideja toga modela učenja jest organizirati aktivnosti za učenike u obliku jednostavnijeg istraživačkog ciklusa prema Pólyinoj ideji rješavanja matematičkih problema: (1) razumijevanje problema, (2) planiranje istraživanja, (3) izvršavanje planiranog, (4) provjera i osvrt na dobiveno rješenje [2]. Ovakvu strategiju rješavanja problema moguće je ugraditi u dinamičko računalno okruženje za učenje, a mnogi autori (npr. [3] i [4]) predlažu upravo *GeoGebra* za primjenu u nastavi matematike.

Predloženi model računalno vođenoga učenja otkrivanjem temelji se na teoriji konstruktivizma prema kojoj svaki pojedinac na temelju opažanja, prethodnih znanja i osobnog iskustva u svojoj fizičkoj i socijalnog okolini konstruira sebi svojstveno znanje [5]. Pri tome je vrlo važno koristiti dobar *scaffolding*, odnosno potporu učenju koja se slikovito opisuje kao skela na gradilištu: u početku se pomaže učeniku koristiti postojeća znanja i vještine i spoznati nepoznate strategije za rješavanje problema, uz postepeno prebacivanje odgovornosti za napredak na samog učenika te povlačenje i puštanje da sam dođe do konačnog rješenja problema [6]. Osim učitelja, takvu vrstu potpore može pružiti i odgovarajuća IKT.

Konstruktivističko učenje idealan je pedagoški pristup e-učenju budući da učenika i njegove aktivnosti stavlja u prvi plan tijekom iskustvenoga učenja [7], a korištenje računalne simulacije smatra se izuzetno pogodnim računalnim okruženjem za učenje otkrivanjem [8]. Učenje otkrivanjem je iskustveno učenje koje se odvija u stvarnosti ili virtualnom laboratoriju. Kod takvoga učenja nastavnik ne prenosi znanje, on je organizator procesa učenja, potiče učenike u konstrukciji vlastitih znanja i potpora je učenju (*scaffolding*). Tri su načela za uspješno učenje otkrivanjem uporabom računalnih simulacija: informacije i simulaciju prikazati istovremeno, učenicima zadati konkretne zadatke te strukturirati okruženje za učenje u nekoliko koraka [8]. Istraživanja [9] i [10] pokazuju da strukturirano, odnosno vođeno učenje otkrivanjem uz poticanje kognitivne aktivnosti učenika s konkretnim nastavnim ciljem najbolje podržava konstruktivistički pristup učenju. Vođeno otkrivanje je svojevrsni kompromis izravnog poučavanja i čistog otkrivanja. Ono uključuje vođenje u smislu *scaffoldinga* kojim se proces učenja usmjerava danom cilju i učeniku daje određena sigurnost da napreduje u dobrom smjeru, odnosno smanjuje se mogućnost da se učenik tijekom postupka otkrivanja izgubi ili zaluta u krivome smjeru. *GeoGebra* se pokazuje kao izvrstan motivacijski alat za podizanje samopouzdanja učenika i može biti izvrsna *scaffolding* potpora učenicima u razumijevanju matematičkih koncepata [11].

## 2. Opis modela računalno vođenoga učenja otkrivanjem

Tri su osnovna elementa na temelju kojih je izgrađen model računalno vođenoga učenja otkrivanjem uporabom *GeoGebre*: (1) objekti učenja, (2) aktivnosti za učenike i (3) ishodi učenja. Slika 1 prikazuje shematski prikaz toga modela učenja.



Slika 1: Shematski prikaz modela računalno vođenoga učenja otkrivanjem

Objekti učenja pregledno su organizirani u digitalni udžbenik koji može sadržavati više nastavnih cjelina (po jedna za svaki nastavni sat), a svaka se cjelina sastoji od nekoliko interaktivnih apleta. U statičnome dijelu apleta nalazi se tekst zadatka i upute za rad učenika, a u dinamičnome dijelu je prikaz simulacije u kojoj je moguće mijenjati neke parametre, upisivati vrijednosti, pomicati točke, te promatrati utjecaj tih promjena na prikazane matematičke objekte. Prema etapama nastavnoga sata, interaktivni apleti mogu imati nekoliko različitih funkcija:

(1) Svaka nastavna jedinica započinje motivacijskim apletom. Njegova je osnovna uloga uvesti učenika u problem, izložiti ideju i motivirati ga za daljnji rad. Stoga su željeni ishodi učenja ove etape nastavnoga sata aktivirati predznanje, potaknuti interes i znatiželju te upoznati problem kojim ćemo se dalje baviti. Taj aplet može biti interaktivan ili uključivati gotovi multimedijalni sadržaj poput videa s *Youtube*-a.

(2) Potom slijedi jedan ili više istraživačkih apleta, ovisno o složenosti matematičkog sadržaja. U tim se apletima učeniku omogućuje izvođenje matematičkog eksperimenta i otkrivanje novih matematičkih znanja. Učenik izvodi jedan ili više istraživačkih ciklusa po etapama Pólyine strategije rješavanja problema [2]. U etapi razumijevanja problema učenik utvrđuje što je poznato, a što nepoznato i koji su uvjeti zadatka. Potom se planira daljnji rad, pokušava uočiti veza između poznatih i nepoznatih elemenata te se formulira pretpostavka. Promatra se interakcija matematičkih objekata i sakupljaju podatci pojedinačnih slučajeva kako bi se došlo do nekog smislenog zaključka. Dobiveni zaključak potvrđuje ili opovrgava pretpostavku, dodatno ga se može provjeriti mijenjanjem početnih parametara i/ili uvjeta zadatka, što će vrlo vjerojatno rezultirati novim istraživačkim pitanjima. Ishodi učenja u toj etapi nastavnog sata su sljedeći: istraživati i otkrivati nove matematičke istine, povezivati staro i novo znanje, provjeravati otkrivena znanja, izvoditi dokaze te općenito steći konceptualno znanje i razumjeti osnovne ideje u nastavi matematike.

(3) Apleti za uvježbavanje, popularno zvani *vježbalice*, sadrže zadatke za stjecanje proceduralnog znanja koje se temelji na prethodno usvojenim matematičkim konceptima. Zadatci mogu biti elementarni ili uključivati neku složeniju primjenu znanja, a zbog dodatne motivacije učenika obično sadrže elemente igre. Napredak učenika potiče se sakupljanjem bodova uz nagrađivanje točnoga odgovora i nešto blaže kažnjavanje netočnoga (npr. +10 bodova za točan odgovor, -5 za netočan). Time se postižu sljedeći ishodi učenja: razvijati vještinu rješavanja zadataka, stjecati točnost i brzinu, primijeniti prethodno *otkrivena* konceptualna znanja u rješavanju zadataka, odnosno stjecati proceduralno znanje.

(4) Na kraju digitalnog udžbenika mogu se uključiti neki dodatni sadržaji, kao što su zanimljivosti iz povijesti matematike, neke specifične primjene usvojenih znanja i stečenih vještina u svakodnevnom životu ili drugim nastavnim predmetima, prošireni matematički sadržaji za darovite učenike, dopunski nastavni sadržaji za učenike slabije razvijenih matematičkih sposobnosti, kvizovi za ponavljanje nastavnih sadržaja, multimedijalni sadržaji poput *Youtube* videa i slično [12].

Primjenom računalno vođenoga modela učenja s pomoću računala i *GeoGebra* izvodi se konstruktivistička nastava matematike u kojoj je učenik aktivan sudionik nastave,

učenik na temelju opažanja i vlastitog iskustva dolazi do vlastitih zaključaka, učenik uči iz autentičnog konteksta i stječe autentična iskustava te preuzima odgovornost za svoje učenje. Uloga učitelja je da organizira proces učenja, osigura nastavne materijale, stvara poticajno okruženje za učenje te podržava proces učenja i usmjerava učenika u tom procesu.

### 3. Primjena modela računalno vođenoga učenja otkrivanjem u nastavi

Primjeri digitalnih udžbenika nastalih prema tome modelu dostupni su javnosti na servisu *GeoGebraTube* kao otvoreni sadržaji putem sljedećih poveznica:

6. razred OŠ: *Kut i trokut*, <http://tube.geogebra.org/student/b272303>

7. razred OŠ: *Sličnost trokuta i mnogokuti*, <http://tube.geogebra.org/student/b364307>

8. razred OŠ: *Pitagorin poučak*, <http://tube.geogebra.org/student/b297339>

1. razred SŠ: *Linearna funkcija*, <http://tube.geogebra.org/book/title/id/583199>

2. razred SŠ: *Kvadratna funkcija*, <http://tube.geogebra.org/book/title/id/2125055>

The image shows a digital textbook interface. On the left is a vertical navigation menu with six items: '1. Odnos duljina stranica i veličina unutarnjih kutova trokuta', '2. Zbroj veličina unutarnjih kutova u trokutu', '3. Simetrala kuta', '4. Visine trokuta', '5. Površina trokuta', and '6. Kviz za provjeru znanja'. The main content area is titled 'Kut i trokut (6. razred)' and includes the author 'Željka Dijanić, 10. stu 2014.' Below this is an illustration of three triangles: an orange one with blue angles, a yellow one with red angles, and a purple one with green angles. Underneath the illustration is a 'Sadržaj' (Table of Contents) section with two main headings: '1. Odnos duljina stranica i veličina unutarnjih kutova trokuta' and '2. Zbroj veličina unutarnjih kutova u trokutu'. The first heading lists five sub-items: '1. Motivacijski zadatak: sastavi trokut (vrste trokuta)', '2. Odnos stranica i kutova trokuta (raznostraničan trokut)', '3. Odnos stranica i kutova trokuta (jednakokrakan trokut)', '4. Odnos duljina stranica trokuta', and '5. VJEŽBALICA 1.'. The second heading lists five sub-items: '1. Zbroj kutova u trokutu (istraživanje)', '2. Zbroj kutova u trokutu (simulacija)', '3. Zbroj kutova u trokutu - dokaz', '4. VJEŽBALICA 2: Zbroj kutova u trokutu', and '5. Pravokutni trokut (dodatni sadržaj)'.

Slika 2: Digitalni udžbenik *Kut i trokut* za 6. razred OŠ

Slika 2 prikazuje popis nastavnih cjelina i interaktivnih apleta digitalnog udžbenika *Kut i trokut* namijenjenog učenicima 6. razreda. Slika 3 prikazuje istraživački aplet za otkrivanje odnosa stranica i kutova raznostraničnog trokuta.

**Odnos stranica i kutova trokuta (raznostraničan trokut)**

1. U bilježnicu nacrtaj ovakvu tablicu:

	najdulja stranica	najveći kut	najkraća stranica	najmanji kut
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

2. Promotri sliku i popuni prvi redak tablice prema podatcima sa slike.  
Napomena: u tablicu upisuj oznake stranica i kutova (a, b, c,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ).

3. Promijeni duljine stranica a, b ili c pomicanjem jednog ili više klizača.

4. Popuni idući redak tablice.

5. Na isti način, mijenjanjem duljina stranica trokuta (za tri nove situacije), popuni preostala tri retka tablice.

6. Pažljivo promotri dobivene podatke u tablici i odgovori na pitanje:  
Kakva je veza između duljina stranica i veličina nasuprotnih kutova trokuta?

Odgovor možeš provjeriti klikom na kontrolni okvir .

Ideja apleta: Niko Grgić, 2014.

**Slika 3: Istraživački aplet: Odnos stranica i kutova trokuta**

U lijevom dijelu prikazanog apleta nalaze se dinamično konstruirani geometrijski objekti poput trokuta i klizača koje je moguće pomicati mišem, dok su u desnom dijelu pitanja i zadatci za učenike, tablica i upute za rad. Na taj je način učenicima na ekranu istovremeno sve vidljivo te se izbjegava nepotrebno *skrolanje* gore-dolje. Interaktivnost i dinamičnost *GeoGebre*, koja u vrlo kratkom vremenu može prikazati puno različitih primjera, omogućava učenje otkrivanjem koje je bez računala teško izvedivo. Ideja ovoga apleta je da učenici na temelju nekoliko konkretnih različitih slučajeva trokuta (s vrijednostima upisanima u tablicu) samostalno dođu do općeg zaključka i na taj način steknu kvalitetnije i dugotrajnije znanje.

Prikaz ostalih vrsta interaktivnih apleta koji se koriste u predloženom modelu učenja s detaljnim opisom aktivnosti i zadataka za učenike može se pogledati u [13].

Učenici i nastavnici koji su koristili predloženi model računalno vođenoga učenja otkrivanjem u nastavi uočili su sljedeće prednosti tog modela učenja: individualizirani pristup svakom učeniku, aktivni rad i donošenje zaključaka u svih učenika (a ne samo boljih), mogućnost napredovanja učenika tempom koji mu odgovara, mogućnost ponavljanja lekcije

više puta ili vraćanje na prethodnu lekciju (čime učenik preuzima kontrolu nad vlastitim učenjem), eksperimentalni rad i samostalno otkrivanje novih spoznaja, vizualizacija matematičkih sadržaja, interaktivnost i dinamičnost digitalnih materijala, brza povratna informacija, lakše i zanimljivije učenje, vježbanje zadataka s pomoću digitalne igre. Konkretni odgovor jedne učenice 6. razreda na pitanje što joj se svidjelo u takvom načinu rada glasi: „Svidjelo mi se to što sam mogla vidjeti različite animacije, a zatim i ja to isprobati. Nisam morala to sve crtati pa sam znala da imam manje šanse za pogreške. A isto tako mi se svidjelo to što sam lako pamtila nastavni sadržaj i nisam imala poteškoća.“

Međutim, uočeni su i neki nedostaci tog modela učenja: nesnalaženje pojedinih učenika u novom okruženju za učenje i isticanje njihove želje da im učitelj ponovo pojašni nastavne sadržaje, nerazumijevanje uputa za rad, *brzanje* pojedinih učenika nastavnim materijalom, neprimjerenost tog modela učenja za usvajanje geometrijskih konstrukcija.

#### 4. Zaključak

Ako se vratimo na podteme ovogodišnjeg CUC-a istaknute u uvodu (učenje usmjereno na učenika, konstruktivistički pristup učenju, učenje kroz argumentaciju, pokusi i greške u službi učenja (istraživačko učenje), igra u službi učenja, udaljeni i virtualni laboratoriji) tada možemo zaključiti da je predloženi model računalno vođenoga učenja otkrivanjem i ponuđeni digitalni obrazovni sadržaji kreirani prema tome modelu jedan od primjera kako udovoljiti zahtjevima suvremene nastave uz uporabu specijaliziranih matematičkih digitalnih alata poput *GeoGebre*. Svakako valja napomenuti da trenutna verzija *GeoGebre*, kao i sučelje za izradu digitalnih udžbenika na *GeoGebraTube* uvelike premašuje mogućnosti koje je imala u trenutku nastajanja ovdje prikazanih digitalnih udžbenika. Neke od njih su umetanje slika, videa, pdf datoteka i/ili interaktivnih pitanja za učenike što kod izrade novih digitalnih obrazovnih sadržaja svakako valja imati na umu.

Nastavnici koji su koristili predloženi model učenja u nastavi matematike uočili su velik potencijal računala i *GeoGebre* kao *scaffolding* podrške ovakvom načinu učenja. Računalno vođeno učenje otkrivanjem utječe na bolje konceptualno razumijevanje matematičkih pojmova i ideja kao i na bolje proceduralno znanje. Kod većine učenika se uočava povećanje interesa za učenje matematike [12]. Međutim, pojedini učenici koji se teže navikavaju na inovativne pristupe u nastavi ističu i neke nedostatke tog modela učenja. Slična istraživanja u svijetu [14] pokazuju da učenicima treba dati vremena da se naviknu na novo i nepoznato dinamično računalno okruženje za učenje.

## Popis literature

- [1] Elliott K., Sweeney K. & Irving H. A learning design to teach scientific inquiry. In: L. Lockyer, S. Bennett, S. Agostinho, & B. Harper (Eds.), *Handbook of Research on Learning Design and Learning Objects: Issues, Applications, and Technologies* (pp. 652-675). Hershey & London: IGI Global. 2009.
- [2] Pólya, G. *How to solve it*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press. 1945.
- [3] Karadag, Z., & McDougall, D. Dynamic worksheets: visual learning with guidance of Pólya. *MSOR Connections* 2009, vol. 9, br. 2, str. 13-16.
- [4] Glasnović Gracin, D. Računalo u nastavi matematike: Teorijska podloga i metodičke smjernice. *Matematika i škola* 2008, br. 46, str. 10-15.
- [5] Von Glasersfeld, E. *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning*. London: Falmer Press. 1995.
- [6] Dennen, V. P. Cognitive apprenticeship in educational practice: Research on scaffolding, modeling, mentoring, and coaching as instructional strategies. In: D. H. Jonassen (Ed.), *Handbook of Research on Educational Communications and Technology* (2nd ed., pp. 813-828). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 2004.
- [7] Wangpipatwong, T., & Papisratom, B. The influence of constructivist e-learning system on student learning outcomes. In: C. van Slyke (Ed.), *Information Communication Technologies: Concepts, Methodologies, Tools, and Applications* (Vol. 1, pp. 1109-1121). Hershey & London: IGI Global. 2008.
- [8] De Jong, T., & van Joolingen, W. R. Scientific discovery learning with computer simulations of conceptual domains. *Review of educational research* 1998, vol. 68, br. 2, str. 179-201.
- [9] Mayer, R.E. Should there be a three-strikes rule against pure discovery learning? The case for guided methods of instruction. *American Psychologist* 2004, vol. 59, br. 1, str. 14-19.
- [10] Kirschner, P.A., Sweller, J., & Clark R. E. Why unguided learning does not work: An analysis of the failure of discovery learning, problem-based learning, experiential learning and inquiry-based learning. *Educational Psychologist* 2006, vol. 41, br. 2, str. 75-86.
- [11] Shadaan, P., & Leong, K. E. Effectiveness of Using GeoGebra on Students' Understanding in Learning Circles. *Malaysian Online Journal of Educational Technology* 2013, vol. 1, br. 4, str. 1-11.
- [12] Dijanić, Ž., *Razvoj modela računalno vođenoga učenja otkrivanjem korištenjem programa dinamične geometrije u nastavi matematike* (neobjavljena doktorska disertacija). Učiteljski fakultet, Sveučilište u Zagrebu. 2017.
- [13] Dijanić, Ž., Zadaci u kontekstu e-užbenika. U: R. Gortan (Ur.), *Zbornik radova Devetog stručno-metodičkog skupa Metodika nastave matematike u osnovnoj i srednjoj školi: Zadaci u nastavi matematike* (str. 56-71). Pula: Matematičko društvo Istra. 2015.
- [14] Denbel, D. G. Students' learning experiences when using a dynamic geometry software tool in a geometry lesson at secondary school in Ethiopia. *Journal of Education and Practice* 2015, vol. 6, br. 1, str. 23-38.